Problema de Ramsey:

$$\max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t, H-l_t) \qquad \text{s.a.}$$

① $c_t + k_t + G_t = f(k_{t-1}, l_t) + (1-\delta) k_{t-1}$

② $\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left(u_c(c_t, H-l_t) c_t - u_h(c_t, H-l_t) \cdot l_t \right) - u_c(c_1, H-n_1) \left((1+r_0) b_0 + \left((1-\tau_1^k) f(k_0, l_1) + 1-\delta \right) k_0 \right) = 0$

③ b_0, k_0 dados.

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t, H-l_t) + \sum_{t=1}^{\infty} \mu_t \left(f(k_{t-1}, l_t) + (1-\delta) k_{t-1} - c_t - k_t - G_t \right)$$
$$+ \lambda \left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left(u_c(c_t, H-l_t) c_t - u_h(c_t, H-l_t) l_t \right) - u_c(c_1, H-l_1) \left((1+r_0) b_0 + \left((1-\tau_1^k) f(k_0, l_1) + 1-\delta \right) k_0 \right) \right.$$

Definamos

$$W(c_t, l_t, \lambda) := u(c_t, H-l_t) + \lambda u_c(c_t, H-l_t) - \lambda u_h(c_t, H-l_t)$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} W(c_t, l_t, \lambda) + \sum_{t=1}^{\infty} \mu_t \left(f(k_{t-1}, l_t) + (1-\delta) k_{t-1} - c_t - k_t - G_t \right)$$
$$- \lambda u_c(c_1, H-l_1) \left((1+r_0) b_0 + (1-\tau_1^k) f(k_0, l_1) + 1-\delta \right) k_0)$$

$[c_t]$: $\beta^{t-1} W_c(c_t, l_t, \lambda) - \mu_t = 0$, $\quad t \geq 2$

$[l_t]$: $\beta^{t-1} W_l(c_t, l_t, \lambda) + \mu_t f_l(k_{t-1}, l_t) = 0$, $\quad t \geq 2$

$[k_t]$: $\mu_t = \mu_{t+1} \left(f_k(k_t, l_{t+1}) + 1-\delta \right)$

En $t=1$:

$[c_1]$: $\beta^{t-1} W_c(c_1, l_1, \lambda) - \mu_1 - \lambda u_{cc}(c_1, H-l_1) (\ldots) = 0$

$[l_1]$: $\ldots$

Resultado principal:

En estado estacionario, $\tau_t^k = 0$:

$$\mu_t = \mu_{t+1}\left(F_k(k_t, l_{t+1}) + 1-\delta\right)$$
$$\mu_t = \beta^{t-1} W_c(c_t, l_t, \lambda)$$

$$\cancel{\beta^{t-1}} W_c(c_t, l_t, \lambda) = \beta^{t} W_c(c_{t+1}, l_{t+1}, \lambda)\left(F_k(k_t, l_{t+1}) + 1-\delta\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{W_c(c_t, l_t, \lambda) = \beta W_c(c_{t+1}, l_{t+1}, \lambda)\left(F_k(k_t, l_{t+1}) + 1-\delta\right)}$$

En estado estacionario: $c_t = c_{t+1} = \dots = c_{ss}$
$l_t = l_{t+1} = \dots = l_{ss}$

$$\Rightarrow W_c(c_t, l_t, \lambda) = W_c(c_{t+1}, l_{t+1}, \lambda)$$

$$\Rightarrow \boxed{1 = \beta\left(F_k(k_{ss}, l_{ss}) + 1-\delta\right)}$$

Las CPO del hogar también se deben cumplir en estado estac:

$$u_c(c_t, H-l_t) = \beta u_c(c_{t+1}, H-l_{t+1})\left((1-\tau_t^k) F_k(k_t, l_{t+1}) + 1-\delta\right)$$

En ee: $u_c(c_t, H-l_t) = u_c(c_{t+1}, H-l_{t+1})$

$$\Rightarrow \boxed{1 = \beta\left((1-\tau_t^k) F_k(k_{ss}, l_{ss}) + 1-\delta\right)}$$

$\Rightarrow$ en estado estacionario: $(1-\tau_t^k) = 1 \iff \boxed{\tau_t^k = 0}$

Es decir, en el largo plazo, los impuestos al capital deben ser cero.

Caso especial: función de utilidad CES:

cobb douglas es una CES cuando $\sigma \to 1$.

$$u(c,h) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + v(h), \qquad u(c, H-l) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + v(H-l)$$

v es cóncava.

$$W(c_t, l_t, \lambda) := u(c_t, H-l_t) + \lambda u_c(c_t, H-l_t)\, c_t - \lambda u_h(c_t, H-l_t)\, l_t$$

$$W_c(c_t, l_t, \lambda) = u_c(c_t, H-l_t) + \lambda u_{cc}(c_t, H-l_t)\, c_t$$
$$+ \lambda u_c(c_t, H-l_t) - \lambda u_{hc}(c_t, H-l_t)\, l_t$$

$$u_c(c_t, H-l_t) = c_t^{-\sigma} \qquad u_{cc}(c_t, H-l_t) = -\sigma c_t^{-\sigma-1}$$
$$u_{ch}(c_t, H-l_t) = 0$$

$$W_c(c_t, l_t, \lambda) = c_t^{-\sigma} + \lambda(-\sigma c_t^{-\sigma}) + \lambda c_t^{-\sigma}$$
$$= c_t^{-\sigma}(1 - \lambda\sigma + \lambda) = (1 + \lambda(1-\sigma))\, c_t^{-\sigma}$$

$$\boxed{W_c(c_t, l_t, \lambda) = \beta W_c(c_{t+1}, l_{t+1}, \lambda)\left(F_k(k_t, l_{t+1}) + 1 - \delta\right)}$$

$$\cancel{(1+\lambda(1-\sigma))}\, c_t^{-\sigma} = \beta \cancel{(1+\lambda(1-\sigma))}\, c_{t+1}^{-\sigma}\left(F_k(k_t, l_{t+1}) + 1 - \delta\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{c_t^{-\sigma} = \beta c_{t+1}^{-\sigma}\left(F_k(k_t, l_{t+1}) + 1 - \delta\right)} \qquad \forall t \geq 2$$

$$u_c(c_t, H-l_t) = \beta u_c(c_{t+1}, H-l_{t+1})\left((1-\tau_t^k) F_k(k_t, l_{t+1}) + 1 - \delta\right)$$

$$\boxed{c_t^{-\sigma} = \beta c_{t+1}^{-\sigma}\left((1-\tau_t^k) F_k(k_t, l_{t+1}) + 1 - \delta\right)} \qquad \forall t \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (1-\tau_t^k) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\tau_t^k = 0,\ t \geq 2}$$

Cuando utilidad es CES, $\tau_t^k = 0$, $t \geq 2$.

En $t=1$, un impuesto al capital es equivalente a un impuesto de suma fija, porque no distorsiona ninguna decisión del hogar, dado que k_0 es exógeno.

Del período 2 en adelante, el impuesto τ_t^k sí es distorsivo y lo óptimo es $\tau_t^k = 0$, $t \geq 2$.